

Examen de admitere
Facultatea de Matematică și Informatică
Proba scrisă – **Matematică**
iulie 2025
Versiunea 1

1. [4 puncte] Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim legea de compoziție

$$x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Elementul neutru al legii de compoziție ” $\circ$ ” este:

A. -2

B. 3

C. $\frac{7}{3}$

D. 1

E. Legea de compoziție ” $\circ$ ” nu admite element neutru

F. 8

Soluție: $\exists e \in \mathbb{Z} : e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Z} \iff \exists e \in \mathbb{Z} : (x - 2)(3e - 7) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \iff$
 $\iff \exists e \in \mathbb{Z} : 3e - 7 = 0 \iff e = \frac{7}{3} \in \mathbb{Z},$ ceea ce este fals. Legea nu admite element neutru.

2. [5 puncte] Fie $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\cos^2 x + \sin(2x) - 1, a = f\left(\frac{\pi}{6}\right), b$ maximul funcției f , iar c numărul soluțiilor ecuației $f(x) = \sqrt{3}$. Valoarea expresiei $ac + b(c + 1)$ este egală cu:

A. 0

B. 1

C. -1

D. $\sqrt{2}$

E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

F. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Soluție: Deoarece $2\cos^2 x - 1 = \cos(2x), x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = \sin(2x) + \cos(2x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \forall x \in [0, 2\pi]$. Deducem că valoarea maximă a funcției f este $b = \sqrt{2}$, astfel că ecuația $f(x) = \sqrt{3}$ nu are nici o soluție și deci $c = 0$. Valoarea expresiei date este $\sqrt{2}$.

3. [5 puncte] Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctg(x)} - \frac{1}{x} \right)$ este:

A. limita nu există

B. 0

C. ∞

D. 1

E. $\frac{1}{2}$

F. niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluție: Expresia din enunț se poate rescrie în forma:

$$\frac{1}{\arctg(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \arctg(x)}{x \arctg(x)} = \frac{x - \arctg(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\arctg(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctg(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(1+x^2)} = 0,$$

deducem, pe baza regulii lui l'Hôpital, că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg(x)}{x^2} = 0$. Astfel, cum $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctg(x)} = 1$, rezultă că:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctg(x)} - \frac{1}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

4. [5 puncte] Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg(3x) - 3x + 4x^3}{x^3(x+1)}$ este:

A. 0

B. 13

C. 1

D. ∞

E. -1

F. $\frac{1}{3}$

Soluție: Suntem într-o situație de nedeterminare $\frac{0}{0}$, cu $(x^3(x+1))' = 4x^3 + 3x^2 \neq 0$ pe o vecinătate a lui 0. Deoarece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tg(3x) - 3x + 4x^3)'}{(x^3(x+1))'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 + \tg^2(3x)) - 3 + 12x^2}{4x^3 + 3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tg^2(3x) + 12x^2}{4x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27 \cdot \frac{\tg^2(3x)}{(3x)^2} + 12}{4x + 3} = 13, \end{aligned}$$

cu regula lui l'Hôpital rezultă că valoarea limitei din enunț este 13.

5. [3 puncte] Valorile parametrului a pentru care ecuațiile $ax + y + 7 = 0$, $(a+1)x + ay + 3 = 0$ reprezintă două drepte paralele sunt:

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ și $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ și $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

E. $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ și $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

F. nu există a cu această proprietate

Soluție: Pentru a fi paralele, cele două drepte trebuie să aibă aceeași pantă. Echivalent, parametrul a satisface ecuația de gradul doi $a^2 - a - 1 = 0$.

6. [5 puncte] Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = x + y - 3xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Valoarea lui $N = \frac{-2024}{3} \circ \frac{-2021}{3} \circ \dots \circ \frac{-2}{3} \circ \frac{1}{3} \circ \frac{4}{3} \circ \dots \circ \frac{2023}{3} \circ \frac{2026}{3}$ este:

A. 2025

B. 0

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2025}$

E. 1

F. $\frac{2025}{3}$

Soluție: Avem că $\frac{1}{3} \circ x = y \circ \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Rezultă că $N = \frac{1}{3}$.

7. [6 puncte] Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \frac{x-1}{x+1}$, $x > -1$. Câte din afirmațiile de mai jos sunt adevărate:

(i) f este derivabilă pe $(-1, +\infty)$ și $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x > -1$.

(ii) f este derivabilă pe $(-1, +\infty)$ și $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $x > -1$.

(iii) $f(x) + \frac{\pi}{4} = \arctg(x)$, pentru orice $x > -1$.

(iv) Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-1, +\infty)$.

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{\pi}{4}}{x} = 0$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

Soluție: Funcția f este compusa corect definită a două funcții derivabile, deci este derivabilă, iar derivata funcției f pe intervalul $(-1, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, +\infty)$$

Afirmația (i) este deci falsă, iar (ii) este adevărată.

Funcția $h(x) = f(x) - \arctg(x)$ are derivata nulă pe intervalul $(-1, \infty)$. Rezultă că h este constantă pe acest interval, deci $h(x) = h(0) = -\frac{\pi}{4}$, $x > -1$. Astfel, se obține că și afirmația (iii) este adevărată.

Cum $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, pentru orice $x > -1$, rezultă că f este strict crescătoare pe intervalul $(-1, +\infty)$, deci afirmația (iv) este adevărată.

De asemenea, avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1,$$

deci afirmația (v) este falsă.

8. [5 puncte] Fie $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$ două matrice, cu proprietatea că $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Atunci urma $\text{tr}(AB)$ (urma unei matrice pătrate este suma elementelor de pe diagonală sa principală) este:

- A. 3
- B. 5
- C. 9
- D. -6
- E. -2**
- F. -5

Soluție: Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ și $Y \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, astfel că $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = 3 + (-5) = -2$.

9. [3 puncte] Valoarea integralei $\int_{-2025}^{2025} x(x^6 + 1)^{2025} \cos x \, dx$ este

- A. 1
- B. 2025
- C. 0**
- D. -2025
- E. -1
- F. $\cos 2025$

Soluție: Deoarece funcția care se integrează este impară și este definită pe un interval simetric față de origine, valoarea integralei este 0.

10. [5 puncte] Dreptele $y - 1 = 0$, $x + \sqrt{3}y - 3 - \sqrt{3} = 0$ și $\sqrt{3}x - y + 1 + \sqrt{3} = 0$ determină un triunghi dreptunghic. Centrul cercului circumscris acestui triunghi are coordonatele:

- A. $(\sqrt{3}, 1)$
- B. $(1, \sqrt{3})$
- C. $(2, 1)$
- D. $(3, \sqrt{3})$
- E. $(1, 1)$.**
- F. $(2, \sqrt{3})$

Soluție: Notând cu d_1 , d_2 , d_3 cele trei drepte din enunț, acestea au pantele $m_1 = 0$, $m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, respectiv $m_3 = \sqrt{3}$. Avem că $d_2 \perp d_3$, astfel că d_2 și d_3 sunt dreptele suport ale catetelor triunghiului. Ele intersectează d_1 în punctele $B(-1, 1)$ și $C(3, 1)$. Centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei BC , care are coordonatele $(1, 1)$.

11. [5 puncte] Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, numărul funcțiilor strict crescătoare $f: A \rightarrow B$ este:

- A. 11
- B. 28
- C. 30
- D. 35**
- E. 36
- F. 42

Soluție: Pentru orice două mulțimi finite M, N , cu $m = \text{card}(M)$ și $n = \text{card}(N)$, $m \leq n$, numărul funcțiilor strict crescătoare $f : M \rightarrow N$ este C_n^m . Pentru $m = \text{card}(A) = 4$ și $n = \text{card}(B) = 7$, avem $C_7^4 = 35$.

12. [3 puncte] Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$. Câte tangente la graficul funcției putem duce, astfel încât acestea să fie paralele cu Ox ?
- A. 0
- B. 1
- C. 2**
- D. 3
- E. 4
- F. o infinitate

Soluție: O dreaptă paralelă cu Ox are panta egală cu 0. Panta tangentei în x_0 la graficul unei funcții derivabile f este numărul $f'(x_0)$. Dreptele care îndeplinesc condiția din enunț sunt tangentele la graficul funcției în punctele care verifică ecuația $f'(x_0) = 0$. Derivata funcției f este $f'(x) = x^2 - 4$. Ecuația $x^2 - 4 = 0$ are două soluții reale $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, astfel că există două tangente la graficul lui f paralele cu Ox , de ecuații $t_1 : y = f(-2) \iff y = \frac{16}{3}$ și $t_2 : y = f(2) \iff y = -\frac{16}{3}$.

13. [6 puncte] Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația $f(x) = x|x| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care f nu este derivabilă este:
- A. $\{0\}$
- B. $\{1\}$**
- C. $\{0, 1\}$
- D. $\emptyset$
- E. $\mathbb{R}$
- F. niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluție: Știm că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ fixat, funcția $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x - a|$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, dar nu este derivabilă în a . Notăm cu g și h funcțiile $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x|x|$, respectiv $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x - 1|$. Cum

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

deducem că g este derivabilă și în 0, deci pe întreaga mulțime a numerelor reale. Astfel, mulțimea punctelor în care funcția f nu este derivabilă coincide cu mulțimea punctelor în care funcția h nu este derivabilă, care este $\{1\}$.

14. [4 puncte] Fie șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1 - x^2} dx$ pentru orice $n \geq 0$. Limita acestui șir este:
- A. 0**
- B. 1
- C. -1
- D. ∞
- E. $-\infty$
- F. nu există

Soluție:

Deoarece $x \in [0, 1]$, are loc $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$, rezultă

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^{2n} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

Din criteriul cleștelui avem că limita șirului (I_n) este 0.

15. [4 puncte] Punctul $A(-1, 0)$ este un vârf al pătratului $ABCD$ căruia îi cunoaștem o diagonală de ecuație $x + 2y - 4 = 0$. Aria pătratului $ABCD$ este:

- A. 12
- B. 16
- C. 25
- D. 8
- E. 20

F. 10

Soluție: Distanța de la A la dreapta d este $\frac{|-1 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$ și reprezintă jumătate din lungimea, D , a diagonalei pătratului. Obținem că aria pătratului este $\frac{D^2}{2} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = 10$.

16. [4 puncte] Fie dreptele $d_1 : 3x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : x - 5y + 4 = 0$ și $d_3 : ax - y + 4 = 0$. Notăm cu A , B , C punctele de intersecție ale dreptelor d_1 și d_2 , d_1 și d_3 , respectiv d_2 și d_3 . Mulțimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care triunghiul ABC este dreptunghic este:

- A. $\emptyset$
- B. $\{-5\}$
- C. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
- D. $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}$
- E. $\left\{-5, \frac{2}{3}\right\}$**
- F. $\mathbb{R}$

Soluție: Pantele dreptelor d_1 , d_2 și d_3 sunt $m_{d_1} = -\frac{3}{2}$, $m_{d_2} = \frac{1}{5}$, respectiv $m_{d_3} = a$. Cum $m_{d_1} \cdot m_{d_2} \neq -1$, deducem că aceste drepte nu sunt perpendiculare. Triunghiul ABC este dreptunghic dacă și numai dacă d_3 este perpendiculară pe d_1 sau d_2 . Avem $d_3 \perp d_1 \iff m_{d_3} \cdot m_{d_1} = -1 \iff a = \frac{2}{3}$, respectiv $d_3 \perp d_2 \iff m_{d_3} \cdot m_{d_2} = -1 \iff a = -5$.

17. [5 puncte] Fie $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Atunci valoarea sumei $\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k$ este:

- A. 2^n
- B. $(n+1) \cdot 2^n$
- C. $n \cdot 2^{n-1}$**
- D. 2^{n-1}
- E. $(n+2) \cdot 2^{n-1}$
- F. $(n-1) \cdot 2^n$

Soluție: Deoarece $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$, avem că $\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$.
(var. 2) Alternativ, numărul perechilor (a, X) , cu $a \in X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ se poate obține fie

numărând modurile în care se poate alege o submulțime $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ și un element $a \in X$, număr dat de $\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k$, fie numărând modurile în care se poate alege un element $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ și apoi completa cu o submulțime $X \setminus \{a\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a\}$, număr dat de $n \cdot 2^{n-1}$.

(var. 3) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, este derivabilă, cu derivata $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k x^{k-1}$. Atunci $\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k = f'(1) = n \cdot 2^{n-1}$.

18. [4 puncte] Considerând șirul cu termenul general $x_n = \frac{\sin(n!\sqrt{2})}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu are limită
 B. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit
C. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita 0
 D. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $\sqrt{2}$
 E. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita ∞
 F. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $\sin(\sqrt{2})$

Soluție: Observăm că:

$$\left| \frac{\sin(n!\sqrt{2})}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ deducem, folosind inegalitățile $-\frac{1}{n!} < x_n < \frac{1}{n!}$ și criteriul cleștelui, că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita 0.

19. [6 puncte] Valoarea integralei

$$\int_0^3 (\sqrt{3-x} + (1-2x)[x-1]) \, dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a , este:

- A. $\sqrt{3} - 4$
 B. $2\sqrt{3} + 4$
 C. $\sqrt{3} + 4$
 D. $3\sqrt{3} - 5$
E. $2\sqrt{3} - 4$
 F. 0

Soluție: Integrala se scrie

$$\int_0^3 (\sqrt{3-x} + (1-2x)[x-1]) \, dx = \int_0^3 \sqrt{3-x} \, dx + \int_0^3 (1-2x)[x-1] \, dx.$$

Pentru prima integrală avem: $\int_0^3 \sqrt{3-x} \, dx = -\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = 2\sqrt{3}$.

Explicitând $[x-1]$ pe intervalul $[0, 3]$, pentru a doua integrală avem:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (1-2x)[x-1] \, dx &= \int_0^1 (1-2x)(-1) \, dx + \int_1^2 (1-2x) \cdot 0 \, dx + \int_2^3 (1-2x) \cdot 1 \, dx = \\ &= (x^2 - x) \Big|_0^1 + 0 + (x - x^2) \Big|_2^3 = -4. \end{aligned}$$

Astfel integrala din enunț are valoarea $2\sqrt{3} - 4$.

20. [3 puncte] Fie triunghiul ABC , unde $C(-3, 2)$, iar ecuația înălțimii duse din A este $2x - y - 2 = 0$. Ecuația dreptei BC este:

A. $x + y + 1 = 0$

B. $x - 2y + 7 = 0$

C. $x + 2y - 1 = 0$

D. $2x + y + 4 = 0$

E. $x - y + 5 = 0$

F. $x + y - 1 = 0$

Soluție: Dreapta BC , fiind perpendiculară pe înălțimea h_a cu panta 2, are panta $m = \frac{-1}{m_{h_a}} = -\frac{1}{2}$. Ecuația dreptei BC , care trece prin punctul $C(-3, 2)$ și are panta $m = -\frac{1}{2}$, este $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 3) \iff (x + 3) + 2(y - 2) = 0 \iff x + 2y - 1 = 0$.

Numărul total de puncte este: 90